УДК 514

В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов

ИНВАРИАНТЫ ГЛАДКИХ СЛОЕНИЙ

Аннотация. *Актуальность и цели.* Геометрия гладких слоений является одним из основных объектов исследования в дифференциальной геометрии, имеющим многочисленные приложения, в частности в теоретической физике. Дифференциальные инварианты слоений изучались одним из авторов настоящей статьи методами, развитыми в работах А. Виноградова, Д. Алексеевского и В. Лычагина. Однако эти методы не предоставляют инвариантной формы записи дифференциальных уравнений изучаемых объектов, что создает определенные трудности при исследовании сложных дифференциально-геометрических структур. Цель исследования состоит в том, чтобы разработать универсальный подход к изучению слоений различной коразмерности. *Материалы и методы.* Используется метод внешних форм и подвижного репера, разработанный Эли Картаном и развитый в работах Г. Ф. Лаптева, А. М. Васильева и других геометров. В частности, Г. Ф. Лаптевым была построена инвариантная теория дифференцируемых отображений гладкого многообразия в многообразие большей размерности. В этой работе мы показываем, как исследовать методом Картана – Лаптева геометрию гладких субмерсий и определяемых ими гладких слоений. *Результаты.* Найден канонический вид структурных уравнений гладкой субмерсии, выяснен геометрический смысл канонизации. Показано, что с субмерсией каноническим образом связаны *G*-структуры первого и второго порядка и некоторый трехвалентный тензор. *Выводы.* Метод Картана – Лаптева позволяет эффективно изучать геометрию гладких слоений различной коразмерности как на произвольных гладких многообразиях, так и на многообразиях, снабженных дополнительной структурой.

Ключевые слова: метод внешних форм и подвижного репера, геометрия гладких слоений, многообразие.

V. M. Kuzakon', A. M. Shelekhov

INVARIANTS OF SMOOTH LAYERINGS

Abstract. *Background.* Geometry of smooth layerings is one of the main objects of research in differential geometry, having multiple applications, particularly in theoretical physics. Differential invariants of layerings have been studied by one of the authors of the present article by the methods developed in work by A. Vinogradov, D. Alekseevsky and V. Lychagin. However, these methods do not represent invariant notation of differential equations of the studied objects, and that causes certain difficulties in research of complex differential-geometric structures. The work is aimed at the development of a universal approach to studying the layerings of various codimensionality. *Materials and methods.* The authors use the method of external forms and moving frames, developed by Elie Cartan and modified by G.F. Laptev and other geometers. In particular, G.F. Laptev built the invariant theory of differentiable mapping of the smooth manifold into the manifold of greater dimensionality. In the present work the authors show the ways to research the geometry of smooth submersions and smooth layerings determined by them using the method of Cartan - Laptev. *Results.* The authors found a canonical form of structural equations of smooth submersions, discovered the geometrical sense of canonization. It is shown that canonical submersions are connected with *G*-structures of the first and second order and a certain trivalent tensor. *Conclusions.* The method of Cartan – Laptev allows effective rsearching of the geometry of smooth layerings of various codimansionality both on random smooth manifolds and on manifolds, supplied by an additional structure.

Key words: method of external forms and moving frames, geometry of smooth layerings, manifold.

Введение

Дифференциальные инварианты слоений изучались одним из авторов настоящей статьи в работах [1–7] методами, описанными в работах [8, 9]. В этой работе мы показываем, как исследовать геометрию гладких слоений классическим методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана, который (метод) был усовершенствован в работах ряда геометров, в первую очередь Г. Ф. Лаптевым, см., например, [10, 11]. В частности, в [12] им была построена инвариантная теория дифференцируемых отображений гладкого многообразия в многообразие большей размерности. Мы развиваем теорию для гладких субмерсий, находим канонический вид структурных уравнений гладкой субмерсии, выясняем геометрический смысл проведенной канонизации. Показано, что с субмерсией каноническим образом связаны G-структуры первого и второго порядка и некоторый трехвалентный тензор.

1. Структурные уравнения гладкой субмерсии в произвольном репере

Пусть M и X – гладкие многообразия размерностей n и r соответственно, $n > r$, и $f : M \to X$ – гладкое отображение (субмерсия).

Следуя [10], зададим структурные уравнения многообразия M в виде

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk},$$

$$d\omega^i_{jk} = \omega^m_{jk} \wedge \omega^i_m - \omega^i_{mk} \wedge \omega^m_j - \omega^i_{jm} \wedge \omega^m_k + \omega^m \wedge \omega^i_{jkm}, \ldots \tag{1}$$

Здесь ω^i, $i, j, k, m, ... = 1, 2, \ldots, n,$ – базисные дифференциальные формы многообразия M, зависящие от дифференциалов параметров x^i – локальных координат на M.

Как известно [11], формы ω^i и ω^i_j образуют базис расслоения $H^1(M)$ корепаров первого порядка многообразия M, формы $\omega^i, \omega^i_j, \omega^i_{jk}$ – базис расслоения $H^2(M)$ кореперов второго порядка и т.д.

Аналогично запишем структурные уравнения многообразия X:

$$d\vartheta^a = \vartheta^b \wedge \vartheta^a_b,$$

$$d\vartheta^a_b = \vartheta^c_b \wedge \vartheta^a_c + \vartheta^c \wedge \vartheta^a_{bc}, \ldots \tag{2}$$

Здесь ϑ^a, $a, b, c, ... = 1, 2, \ldots, m,$ – базисные дифференциальные формы многообразия X, зависящие от дифференциалов параметров u^a – локальных координат на X.

В локальных координатах уравнения субмерсии f имеют вид $u = f(x)$. Продифференцировав это уравнение и заменив в нем дифференциалы переменных на инвариантные формы ω^i и ϑ^a, получим дифференциальные уравнения субмерсии f в инвариантной форме:

$$\vartheta^a = \lambda_i^a \omega^i. \tag{3}$$

Функции $\lambda_i^a = \lambda_i^a(x,u)$ образуют дифференциально-геометрический объект первого порядка отображения f [11].

Субмерсия f определяет в многообразии M слоение Φ со слоями коразмерности m, причем базой слоения является многообразие X. Слой в M выделяется фиксацией точки многообразия X, т.е. фиксацией локальных координат u^a (или, короче, параметра u). Полагая $u = \mathrm{const}$, мы получаем $\vartheta^a = 0$, в силу чего из (3) следует

$$\lambda_i^a \omega^i = 0 \; - \tag{4}$$

дифференциальные уравнения слоения Φ.

На многообразии M действует псевдогруппа локальных диффеоморфизмов, которую обозначим P. Аналогичную группу, действующую на X, обозначим Q. Если на многообразиях M и X не фиксированы никакие дополнительные структуры, то субмерсия f и слоение Φ рассматриваются с точностью до преобразований псевдогруппы $P \times Q$.

Внешнее дифференцирование уравнений (3) с учетом структурных уравнений приводит к квадратичным уравнениям

$$(d\lambda_i^a - \lambda_k^a \omega_i^k + \lambda_i^b \vartheta_b^a) \wedge \omega^i = 0.$$

Пользуясь леммой Картана, находим

$$d\lambda_i^a - \lambda_k^a \omega_i^k + \lambda_i^b \vartheta_b^a = \lambda_{ik}^a \omega^k, \tag{5}$$

где $\lambda_{ik}^a = \lambda_{ki}^a$ – некоторые новые функции, составляющие вместе с функциями λ_i^a дифференциально-геометрический объект второго порядка отображения f [10].

Продолжая уравнения (5), т.е. дифференцируя их внешним образом и раскрывая затем по лемме Картана, мы получим новую серию уравнений, вводящих новые функции $\lambda_{ik\ell}^a$ и т.д. Уравнения (1), (2) вместе с уравнениями (3), (5) и т.д. называются *структурными уравнениями субмерсии* f *или слоения* Φ.

Сузим семейство кореперов $H^1(M)$, выбрав формы $\lambda_i^a \omega^i$, которые аннулируются на слоях слоения Φ, в качестве новых базисных форм ω^a многообразия M. В новом базисе уравнения (4) слоя слоения Φ примут вид

$$\omega^a = 0. \tag{6}$$

Сравнивая с (4), находим, что в новом репере $\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$, где, как обычно, через δ_b^a обозначен символ Кронекера и $u = m+1, m+2, \ldots, n$. Полученные таким образом кореперы первого порядка назовем адаптированными субмерсии f или слоению Φ. Как обычно, термин «адаптированный корепер» применяется также ко всему расслоению адаптированных кореперов, которое обозначим R_1. Далее будем считать, что все рассуждения проводятся в адаптированном корепере R_1. В нем уравнения (3) принимают простой вид:

$$\vartheta^a = \omega^a. \tag{7}$$

Назовем их *каноническими уравнениями субмерсии* f *или слоения* Φ.

В силу специализации корепера ($\lambda_b^a = \delta_b^a$, $\lambda_u^a = 0$) уравнения (5) разбиваются на две серии:

$$\vartheta_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a \omega^k \tag{8}$$

и

$$\omega_u^a = A_{uv}^a \omega^v + A_{ub}^a \omega^b, \tag{9}$$

где обозначено $A_{uk}^a = -\lambda_{uk}^a$, причем в силу симметрии величин λ_{jk}^a по нижним индексам величины A_{uv}^i также симметричны: $A_{uv}^i = A_{vu}^i$.

2. Канонические структурные уравнения субмерсии

Продифференцировав уравнения (9) внешним образом, получим

$$\nabla A_{uv}^a \wedge \omega^v + \nabla A_{ub}^a \wedge \omega^b + A_{ub}^a A_{vc}^b \omega^v \wedge \omega^c = 0, \tag{10}$$

где обозначено

$$\nabla A_{uv}^a = dA_{uv}^a + A_{uv}^b \omega_b^a - A_{wv}^a \omega_u^w - A_{uw}^a \omega_v^w + \omega_{uv}^a,$$

$$\nabla A_{ub}^a = dA_{ub}^a + A_{ub}^c \omega_c^a - A_{vb}^a \omega_u^v - A_{uc}^a \omega_b^c - A_{uv}^a \omega_b^v + \omega_{ub}^a. \tag{11}$$

При этом в силу симметрии величин A_{uv}^a можно считать, что формы ω_{uv}^a также симметричны: $\omega_{uv}^a = \omega_{uv}^a$.

Используя лемму Картана, из квадратичных уравнений (10) находим

$$\nabla A_{uv}^a = A_{uvb}^a \omega^b + A_{uvw}^a \omega^w, \nabla A_{ub}^a = A_{ubc}^a \omega^c + A_{ubv}^a \omega^v, \tag{12}$$

причем выполняются соотношения:

$$A_{[uv]b}^a = 0,\ A_{uvw}^a = A_{(uvw)}^a,\ A_{u[bc]}^a = 0,\ A_{ubv}^a - A_{uvb}^a = A_{uc}^a A_{ub}^c. \tag{13}$$

Положим

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a + \lambda_{bk}^a \omega^k, \tag{14}$$

тогда уравнения (8) примут вид

$$\vartheta_b^a = \tilde{\omega}_b^a, \tag{15}$$

а в силу (7), (15) и равенств $A^a_{ub} = -\lambda^a_{ub} = -\lambda^a_{bu}$ первые серии структурных уравнений (1) и (2) примут одинаковый вид:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \tilde{\omega}^a_b. \tag{16}$$

На остальные уравнения первой серии (1) замена (14) не повлияет:

$$d\omega^u = \omega^k \wedge \omega^u_k.$$

Найдем вид псевдогруппы $P \times Q$ в корепере R_1. Произвольное преобразование из P имеет вид $\tilde{\omega}^i = p^i_j \omega^j$, а произвольное преобразование из Q – $\tilde{\vartheta}^a = q^a_b \vartheta^b$. Будем считать, что кобазисы $\tilde{\omega}^i$ и $\tilde{\vartheta}^a$ также из R_1, т.е. для них также выполняются уравнения (7): $\tilde{\vartheta}^a = \tilde{\omega}^a$. Тогда из предыдущих уравнений получаем $q^a_b = p^a_b$, $p^a_v = 0$, и матрица (p^i_j) принимает вид

$$\begin{vmatrix} (p^a_b) & 0 \\ (p^u_b) & (p^u_v) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, в результате редукции репера псевдогруппа P сузилась до псевдогруппы P', выделяемой условиями $p^a_v = 0$, а псевдогруппа Q вкладывается в P', которая является ее расширением.

Замена (14) определяет переход к новому адаптированному кореперу, который обозначим R_2. Далее будем считать, что все уравнения записаны в корепере R_2. Сравнивая уравнения (15) и (8), находим, что в корепере R_2 должны выполняться соотношения $\lambda^a_{bk} = 0$, откуда в силу симметрии этих величин по нижним индексам и введенных обозначений получаем $A^a_{ub} = 0$. В результате уравнения (9) примут вид

$$\omega^a_u = A^a_{uv} \omega^v, \tag{17}$$

где в силу предыдущих обозначений

$$A^a_{uv} = A^a_{vu}. \tag{18}$$

Вторые равенства (11) и (12) в силу условия $A^a_{ub} = 0$ дают

$$\omega^a_{ub} = A^a_{uv} \omega^v_b + A^a_{ubc} \omega^c + A^a_{ubv} \omega^v, \tag{19}$$

а соотношения (13) теперь перепишутся так:

$$A^a_{[uv]b} = 0,\ A^a_{uvw} = A^a_{(uvw)},\ A^a_{u[bc]} = 0,\ A^a_{ubv} = A^a_{uvb}. \tag{13$'$}$$

Далее дифференцируем (15), пользуясь структурными уравнениями (1) и (2), записанными в корепере R_2. Получим:

$$(\omega^a_{bc} - \vartheta^a_{bc}) \wedge \omega^c + (\omega^a_{bv} - A^a_{uv}\omega^u_b) \wedge \omega^v = 0.$$

Применяя лемму Картана, получаем уравнения:

$$\omega^a_{bc} - \vartheta^a_{bc} = \mu^a_{bcd}\omega^d + \mu^a_{bcv}\omega^v, \omega^a_{bv} - A^a_{uv}\omega^u_b = \mu^a_{bvc}\omega^c + \mu^a_{bvw}\omega^w, \tag{20}$$

причем выполняются соотношения

$$\mu^a_{b[cd]} = 0,\ \mu^a_{bcv} = \mu^a_{bvc},\ \mu^a_{b[vw]} = 0. \tag{21}$$

С помощью первого из соотношений (20) введем следующие обозначения:

$$\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \omega^a_{bc} - \mu^a_{bcv}\omega^v = \vartheta^a_{bc} + \mu^a_{bcd}\omega^d \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}. \tag{22}$$

В результате имеем

$$d\omega^a_b = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^u_b \wedge \omega^a_u + \omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + A^a_{uv}\omega^u_b \wedge \omega^v +$$

$$+\omega^c \wedge \omega^a_{bc} + \omega^v \wedge \omega^a_{bv} = \omega^c_b \wedge \omega^a_c + \omega^v(\omega^a_{bv} - A^a_{uv}\omega^u_b) + \omega^c \wedge \omega^a_{bc}.$$

Заменяя выражение в скобках с помощью (20) и учитывая соотношение $\mu^a_{b[vw]} = 0$ (см. (21)), после преобразований с учетом обозначений (22) окончательно получим

$$d\tilde{\omega}^a_b = \tilde{\omega}^c_b \wedge \tilde{\omega}^a_c + \omega^c \wedge \tilde{\omega}^a_{bc}. \tag{23}$$

Простым вычислением проверяется, что форма $d\tilde{\vartheta}^a_{bc}$ имеет такой же вид, т.е. дифференцирование соотношения $\tilde{\omega}^a_{bc} = \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, вытекающего из (22), дает тождество.

Замены (22) определяют переход к новым адаптированным корeперам третьего порядка на многообразиях M и X, которые (кореперы) обозначим соответственно R_3 и R'. В них (см. (22)) уже $\tilde{\omega}^a_{bc} \equiv \tilde{\vartheta}^a_{bc}$, поэтому из уравнений вида (20), записанных для корепера R_3, следует $\mu^a_{bcd} = \mu^a_{bcv} = 0$, и, следовательно, вторые уравнения (20) принимают вид

$$\omega^a_{bu} = A^a_{vu}\omega^v_b + \mu^a_{buv}\omega^v. \tag{20′}$$

Продолжая вышеприведенные рассуждения по индукции, придем к следующему утверждению.

Теорема 1. Пусть $f: M \to X$ – гладкая субмерсия, и структурные уравнения многообразий M и X записаны в виде (1), (2). Тогда базисы в расслоениях кореперов первого, второго и т.д. порядков на многообразиях M и X можно выбрать так, чтобы выполнялись уравнения

$$\vartheta^a = \omega^a,\ \vartheta^a_b = \omega^a_b,\ \omega^a_{bc} = \vartheta^a_{bc}, \ldots \tag{24}$$

для любого числа нижних индексов.

Если это сделано, то будем говорить, что *структуры многообразий M и X канонически согласованы относительно субмерсии f*. В этом случае структурные уравнения (2) многообразия X составляют часть структурных уравнений (1) многообразия M, которые будем называть *каноническими структурными уравнениями субмерсии* f *или слоения* Φ.

Если выполняется только первая серия соотношений (24), то будем говорить, что канонически согласованы структуры первого порядка; если первая и вторая серии соотношений – то канонически согласованы структуры второго порядка относительно субмерсии f и т.д.

В случае, если канонически согласованы структуры второго порядка, первые две серии уравнений (1) будем называть структурными уравнениями субмерсии f.

3. G-структуры, связанные с субмерсией

Первые две серии структурных уравнений (1) многообразия M

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j,\ d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk} \tag{25}$$

можно рассматривать как структурные уравнения главного расслоения реперов (реперов первого порядка) над M, базой которого является M, а слоем – многообразие R_p реперов первого порядка, отнесенных к текущей точке p, $p \in M$. Слой R_p выделяется вполне интегрируемой системой $\omega^i = 0$, в силу которой уравнения (25) принимают вид

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k. \tag{26}$$

Здесь, как обычно, $\pi^i_j = \omega^i_j (\operatorname{mod} \omega^i = 0)$, а δ – символ дифференцирования по вторичным параметрам, т.е. параметрам репера в R_p. Уравнения (26) представляют собой уравнения полной линейной группы $GL(n)$, действующей на многообразии R_p свободно и просто транзитивно.

В случае, если на многообразиях M и X канонически согласованы структуры второго порядка, то из уравнений (17) и (26) получаем $\pi^a_u = 0$, $\delta\pi^a_u = 0$. Вполне интегрируемая система $\pi^a_u = 0$ выделяет на группе $GL(n)$ подгруппу G, структурные уравнения которой получаются из (26) с учетом $\pi^a_u = 0$:

$$\delta\pi^a_b = \pi^c_b \wedge \pi^a_c, \delta\pi^u_b = \pi^c_b \wedge \pi^u_c + \pi^v_b \wedge \pi^u_v, \delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w. \tag{26’}$$

Группа G есть группа матриц вида

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix}, \tag{27}$$

где A, B, C – матрицы $r \times r, (n-r) \times r, (n-r) \times (n-r)$ соответственно.

Вполне интегрируемые системы $\pi^u_b = \pi^u_v = 0$, $\pi^u_v = \pi^a_b = 0$, $\pi^a_b = \pi^u_b = 0$ выделяют в группе G соответственно подгруппы $GL(r), A(r, n-r), GL(n-r)$, где через $A(r, n-r)$ обозначена абелева группа матриц $(n-r)\times r$ относительно сложения. Как видно из уравнений (26′), подгруппы $GL(r)$ и $GL(n-r)$ являются нормальными делителями в G.

Группа G действует транзитивно на многообразии адаптированных реперов, которое выше было обозначено R_1. Поэтому она задает на многообразии M G-структуру [13], которую обозначим B_G.

Согласно определению группа $GL(r)$ транзитивно действует на расслоении реперов многообразия X. Покажем, что группа $GL(n-r)$ транзитивно действует на расслоении реперов слоя слоения Φ. Действительно, слой фиксируется уравнением (9), в силу которого из уравнений (1) (в адаптированном репере) получаем структурные уравнения слоя:

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u, d\omega_v^u = \omega_v^w \wedge \omega_w^u + \omega_v^b \wedge \omega_b^u + \omega^w \wedge \omega_{vw}^u =$$

$$= \omega_v^w \wedge \omega_w^u + A_{vw}^b \omega^w \wedge \omega_b^u + \omega^w \wedge \omega_{vw}^u.$$

Фиксируя точку слоя ($\omega^u = 0$), получаем структурные уравнения группы $GL(n-r)$:

$$d\pi_v^u = \pi_v^w \wedge \pi_w^u.$$

Следовательно, эта группа действует на расслоении реперов, базой которого является слой слоения Φ.

Рассмотрим далее первые 3 серии структурных уравнений (1). Их можно рассматривать как структурные уравнения главного расслоения реперов второго порядка над M, базой которого является M, а слоем – многообразие R_p^2 реперов второго порядка, отнесенных к текущей точке p, $p \in M$. Слой R_p^2 выделяется вполне интегрируемой системой $\omega^i = 0$, в силу которой из (1) следует

$$\delta\pi_j^i = \pi_j^k \wedge \pi_k^i, \delta\pi_{jk}^i = \pi_{jk}^m \wedge \pi_m^i - \pi_{mk}^i \wedge \pi_j^m - \pi_{jm}^i \wedge \pi_k^m. \qquad (28)$$

Эти уравнения определяют группу Ли, которая называется дифференциальной группой второго порядка [11], обозначим ее D^2. Отметим, что дифференциальные группы исследовались разными авторами, например, их матричное представление дано в [14], см. также [15].

В случае, если структуры многообразий M и X согласованы до второго порядка, из третьей серии уравнения (28) в силу (17) находим

$$\delta\pi_{uv}^a = \pi_{uv}^b \wedge \pi_b^a - \pi_{wv}^a \wedge \pi_u^w - \pi_{uw}^a \wedge \pi_v^w. \qquad (28')$$

Отсюда следует, что система пфаффовых уравнений $\pi_{uv}^a = 0$ на группе D^2 вполне интегрируема и, следовательно, выделяет некоторую подгруппу, обозначим ее D_0^2.

Пусть в расслоении реперов второго порядка над M каким-либо образом зафиксировано подрасслоение вида

$$\omega_{uv}^a = B_{uvk}^a \omega^k. \quad (29)$$

Обозначим его $\tilde{R}$. В слое R_p^2 этого подрасслоения будут выполняться уравнения $\pi_{uv}^a = 0$, т.е. в R_p^2 действует группа D_0^2. Следовательно, на многообразии M определена G-структура второго порядка $B_{D_0^2}$ со структурной группой D_0^2 [15]. В то же время из (12) находим, что на $\tilde{R}$ форма ∇A_{uv}^a становится главной. Это означает, см. [10], что величины A_{uv}^a образуют тензор на G-структуре B_G. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f: M \to X$ – субмерсия, и структуры M и X канонически согласованы относительно f, т.е. выполняются уравнения (1), (16), (17), (19), (20′), (23) и т.п. Тогда на M определена G-структура B_G, где G – подгруппа вида (27) полной линейной группы $GL(n)$, действующая на подрасслоении реперов, заданным уравнениями (17). Пусть на M каким-либо образом зафиксировано сечение вида (29). Тогда на M определена G-структура второго порядка $B_{D_0^2}$ со структурной группой D_0^2 – подгруппой дифференциальной группой второго порядка D^2, выделяемой уравнениями $\pi_{uv}^a = 0$. При этом величины A_{uv}^a, определенные равенствами (10) и (12), образуют тензор на G-структуре B_G.

Список литературы

1. **Кузаконь, В. М.** Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности / В. М. Кузаконь, М. О. Рахула // Украинский геометрический сборник. – 1978. – № 21. – С. 44–50.
2. **Кузаконь, В. М.** Тензорные инварианты сечений субмерсий с дополнительными структурами / В. М. Кузаконь // Математичні Студії. – 2002. – Т. 17, № 2. – С. 199–210.
3. **Кузаконь, В. М.** Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств / В. М. Кузаконь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005, Т. 48, № 4. – С. 95–99.
4. **Кузаконь, В. М.** Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости / В. М. Кузаконь // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006, Т. 3, № 3. – С. 201–212.
5. **Кузаконь, В. М.** Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского / В. М. Кузаконь, И. С. Стрельцова // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2007, Т. 43, № 1. – С. 49–54.
6. **Кузаконь, В. М.** Дифференциальные инварианты слоений / В. М. Кузаконь // Доклады Национальной Академии Наук Украины. – 2009. – № 4. – С. 25–27.
7. **Кузаконь, В. М.** Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Лобачевского / В. М. Кузаконь // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 2. – С. 82–90.
8. **Алексеевский, Д. В.** Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии / Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – 1988. – Т. 28. – 289 с.

9. **Красильщик, И. С.** Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений / И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, А. В. Виноградов. – М. : Наука, 1986. – 336 с.
10. **Лаптев, Г. Ф.** Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии : тр. геометрического семинара / Г. Ф. Лаптев. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 139–189.
11. **Лаптев, Г. Ф.** Структурные уравнения главного расслоенного многообразия : тр. геометрического семинара / Г. Ф. Лаптев. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 161–178.
12. **Лаптев, Г. Ф.** К инвариантной аналитической теории дифференцируемых отображений : тр. геометрического семинара / Г. Ф. Лаптев. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 6. – С. 37–42.
13. **Стернберг, С.** Лекции по дифференциальной геометрии / С. Стернберг. – М. : Мир, 1970. – 412 с.
14. **Лумисте, Ю. Г.** Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов : тр. геометрического семинара / Ю. Г. Лумисте. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 5. – С. 239–257.
15. **Евтушик, Л. Е.** Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы : тр. геометрического семинара / Л. Е. Евтушик. – М. : ВИНИТИ АН СССР, 1969. – Т. 2. – С. 119–150.

References

1. Kuzakon' V. M., Rakhula M. O. *Ukrainskiy geometricheskiy sbornik* [Ukranian geometrical collection]. 1978, no. 21, pp. 44–50.
2. Kuzakon' V. M. *Matematichni Ctudiï* [Mathematical studies]. 2002, vol. 17, no. 2, pp. 199–210.
3. Kuzakon' V. M. *Mat. metodi ta fiz.-mekh. polya* [Mathematical methods and physical-mechanical fields]. 2005, vol. 48, no. 4, pp. 95–99.
4. Kuzakon' V. M. *Zbirnik prats' Institutu matematiki NAN Ukraïni* [Collected papers of the Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2006, vol. 3, no. 3, pp. 201–212.
5. Kuzakon' V. M., Strel'tsova I. S. *Mat. metody ta fiz.-mekh. polya* [Mathematical methods and physical-mechanical fields]. 2007, vol. 43, no. 1, pp. 49–54.
6. Kuzakon' V. M. *Doklady Natsional'noy Akademii Nauk Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2009, no. 4, pp. 25–27.
7. Kuzakon' V. M. *Zbirnik prats' In-tu matematiki NAN Ukraïni* [Collected papers of the Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 2009, vol. 6, no. 2, pp. 82–90.
8. Alekseevskiy D. V., Vinogradov A. M., Lychagin V. V. *Sovremennye problemy matematiki. Fudamental'nye napravleniya* [Modern problems of mathematics. Fundamental directions]. 1988, vol. 28, 289 p.
9. Krasil'shchik I. S., Lychagin V. V., Vinogradov A. V. *Vvedenie v geometriyu nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Introduction into geometry of nonlinear differential equations]. Moscow: Nauka, 1986, 336 p.
10. Laptev G. F. *Osnovnye infinitezimal'nye struktury vysshikh poryadkov na gladkom mnogoobrazii: tr. geometricheskogo seminara* [Basic infinitesimal structures of higher orders on the smooth manifold: proceedings of the geometrical seminar]. Moscow: VINITI AN SSSR, 1966, vol. 1, pp. 139–189.
11. Laptev G. F. *Strukturnye uravneniya glavnogo rassloennogo mnogoobraziya: tr. geometricheskogo seminara* [Structural equations of the main foliated manifold: pro-

ceedings of the geometrical seminar]. Moscow: VINITI AN SSSR, 1969, vol. 2, pp. 161–178.
12. Laptev G. F. *K invariantnoy analiticheskoy teorii differentsiruemykh otobrazheniy: tr. geometricheskogo seminara* [Towards invariant analytical theory of differentiable mapping: proceedings of the geometrical seminar]. Moscow: VINITI AN SSSR, 1974, vol. 6, pp. 37–42.
13. Sternberg S. *Lektsii po differentsial'noy geometrii* [Lections on differential geometry]. Moscow: Mir, 1970, 412 p.
14. Lumiste Yu. G. *Matrichnoe predstavlenie polugolonomnoy differentsial'noy gruppy i strukturnye uravneniya rassloeniya p -koreperov: tr. geometricheskogo seminara* [Matrix representation of the semiholonomic differential group and structural equations of layering of p-coframes: proceedings of the geometrical seminar]. Moscow: VINITI AN SSSR, 1974, vol. 5, pp. 239–257.
15. Evtushik L. E. *Differentsial'nye svyaznosti i infinitezimal'nye preobrazovaniya prodolzhennoy psevdogruppy: tr. geometricheskogo seminara* [Differential connectivities and infinitesimal transformation of the extended pseudogroup: proceedings of the geometrical seminar]. Moscow: VINITI AN SSSR, 1969, vol. 2, pp. 119–150.

Кузаконь Виктор Михайлович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Одесская национальная академия пищевых технологий (Украина, г. Одесса, ул. Канатная, 112)

E-mail: kuzakon_v@ukr.net

Kuzakon' Viktor Mikhaylovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher mathematics, Odessa National Academy of Food Technologies (112 Kanatnaya street, Odessa, Ukraine)

Шелехов Александр Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра функционального анализа и геометрии, Тверской государственный университет (Россия, г. Тверь, Садовый переулок, 35)

E-mail: amshelekhov@rambler.ru

Shelekhov Aleksandr Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of functional analysis and geometry, Tver State University (35 Sadovy lane, Tver, Russia)

УДК 514

Кузаконь, В. М.

Инварианты гладких слоений / В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 4 (28). – С. 71–81.